

横观各向同性层状地基动应力响应的求解与分析

韩泽军¹, 林 皋², 周小文¹, 杨林青³

(1. 华南理工大学 土木与交通学院, 广东 广州 510641; 2. 大连理工大学 建设工程学部, 辽宁 大连 116024;
3. 广东技术师范学院天河学院 建筑工程学院, 广东 广州 510540)

摘 要: 动力响应问题的求解对于地基在外荷载作用下引起的弹性波动问题研究有重要的意义。本文提出了一种求解横观各向同性层状地基在施加时间简谐荷载作用下任意点的应力响应的算法。此算法利用傅里叶变换将广义平面应变问题频率-空间域的动力方程转化到频率-波数域内, 结合对偶变量的引入, 利用高精度的精细积分算法对状态方程进行求解, 在得到频率-波数域内的位移响应的基础上, 利用傅里叶逆变换得到任意点的动应力响应。简谐荷载不仅可以施加在地基表面, 而且可以施加在地基内部。对比算例验证了本文算法的准确性, 同时对地基各向异性特性、激励频率和阻尼比对动应力响应的影响进行了参数分析, 为工程实际提供可靠的数值依据。

关 键 词: 横观各向同性; 层状地基; 简谐荷载; 动应力响应; 精细积分算法

中图分类号: O 302

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018) 06-2287-08

Solution and analysis of dynamic stress response for transversely isotropic multilayered soil

HAN Ze-jun¹, LIN Gao², ZHOU Xiao-wen¹, YANG Lin-qing³

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510641, China;

2. Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

3. School of Civil Engineering, Tianhe College of Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou, Guangdong 510540, China)

Abstract: The dynamic response is significant to the elastic wave problem in soil caused by the external load. This paper proposes a solution to calculate dynamic stress responses of an arbitrary point in a transverse isotropic multilayered soil subjected to a time-harmonic load. The generalized plane-strain equation is transformed from frequency-spatial domain into frequency-wave number domain by Fourier transformation in this algorithm. Combined with the introduction of the dual vector, the state equation is solved by the precise integration method. Based on the displacement response of the soil in the frequency-wave number domain, the dynamic stress response of any point is obtained by the inverse Fourier transformation. The time-harmonic load can be applied at the surface of the soil or under ground. The accuracy of the algorithm in this paper is verified by a comparison with an existing solution. An extensive parametric analysis on the influence of anisotropy, excited frequency and damping ratio on the dynamic stress response provides reliable numerical basis for engineering practice.

Keywords: transversely isotropy; multilayered soil; harmonic load; dynamic stress response; precise integration method

1 引 言

动力响应问题的求解对于地基在外荷载作用下引起的弹性波动问题研究有重要的意义, 例如交通、机械和打桩等。但对于层状地基, 由于计算比较复

杂, 早期的文献大多假设为均质半无限地基进行近似的求解以适应工程设计施工的需要。而实际上, 许多大型土木建筑以及海洋工程建筑都是坐落在层状地基之上的, 并且层状地基在形成过程中容易存在各向异性特性, 因此, 近年来随着计算机技术水

收稿日期: 2016-07-11

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目 (No.51508203); 博士后科学基金面上资助 (No.2015M570713); 博士后科学基金特别资助 (No.2016T90783)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51508203), the China Postdoctoral Science Foundation (2015M570713) and the Special Financial Grant from the China Postdoctoral Science Foundation (2016T90783).

第一作者简介: 韩泽军, 男, 1985 年生, 讲师, 主要从事结构-复杂层状地基动力相互作用研究。E-mail: ctzjhan@scut.edu.cn

平的逐步发展,横观各向同性层状地基的动力响应求解越来越引起学者们的注意。关于地基动力响应问题求解的全面性综述可参见文献[1-3]。

早期, Luco 等^[4]得到了条形基础在接触面完全密切结合条件下动力刚度的解,最终的方程数值求解十分困难,故只对泊松比等于 0.5 的情况得到了全面的解答,对其他较小泊松比的情况,只对低频段得出了近似解。Gazetas^[5]提出了一种解析数值算法求解不均匀半无限体弹性地基表面条形基础动力和静力响应,半无限体地基的 S 波波速可以随深度线性变化。随后 Gazetas^[6]得到了横观各向同性层状地基表面条形基础动力响应,该方法只能处理均质半无限体或者单层地基的情况。Wolf 等^[7]利用边界元算法求解得到了层状地基表面条形基础动力刚度矩阵,针对波数域内的动力方程采用传递矩阵方法进行求解,其计算过程中涉及指数运算,对于地基厚度太大或者大频率情况将造成指数溢出,从而使计算失败。林皋等^[8-9]和韩泽军^[10]结合傅里叶变换方程和精细积分算法对二维层状地基位移动力响应提出了高效而精确的算法。以上算法均处理层状地基表面位移动力响应的问题,对于层状地基应力响应未给出求解。

Rajapakse 等^[11-12]求解得到了二维均质横观各向同性和正交各向异性半无限地基在内部简谐荷载作用下的动力响应问题,不仅得到了位移的响应,而且给出了地基的应力响应。Eskandri-Ghadi^[13]引入两个势函数作为基本解,用于求解横观各向同性介质波动方程的完全解。之后,利用此势函数, Rahimian^[14]、Khojasteh^[15-16]等完成了更多针对横观各向同性介质的动力响应求解问题。虽然这些研究均给出了位移和应力的动力响应解,但研究对象只针对均质半无限空间。对于多层横观各向同性地基,近年来才有学者给出了较为精确的求解结果。Khojasteh 等^[17]利用势位移的方法求解了两层横观各向同性层状地基的格林函数,随后对算法进行扩展求解得到了任意横观各向同性层状地基的三维格林函数^[18]。Ai 等^[19-21]提出了解析层元法得到了横观各向同性层状地基在竖直向和水平向时间简谐荷载作用下的动力响应解。随后,艾智勇等^[22]运用对偶积分方程来求解层状横观各向同性地基与墙下条形基础的接触应力问题。

本文旨在寻求一种求解横观各向同性层状地基在任意点施加时间-简谐荷载作用下任意点的应力

响应的算法。此算法利用傅里叶变换将广义平面应变问题的动力方程转化到频率-波数域中,结合对偶变量的引入,利用高精度的精细积分算法进行求解。在得到频率-波数域内的位移响应的基础上利用傅里叶逆变换最终得到动应力响应。此算法不仅具有较高的求解精度,而且在计算过程中具有较好的数值稳定性。

2 问题的定义

假定横观各向同性层状地基与底部半无限空间的材料属性都为均质情况,且层与层之间的交界面水平,如图 1 所示,层状地基包含 n 层,下卧半无限空间,两者均有 5 个弹性控制参数,分别为水平面弹性模量 E_{HH} 和泊松比 ν_{HH} , 竖直面弹性模量 E_{HV} 、 ν_{HV} 以及剪切模量 G_{HV} , 此外定义每层的阻尼比为 ζ_i , 密度为 ρ_i , 厚度为 $h_i = z_i - z_{i-1}$ ($i=1,2,\dots,n$)。建立如图所示的直角坐标系,坐标原点 O 设置在地基的表面, x 轴水平向右, z 轴竖直向下。在地基表面或内部任意点施加半宽为 Δ 水平或者竖直向幅值为 $\bar{q}$ 的均布简谐荷载,求解在此荷载作用下层状地基任意点的应力响应。

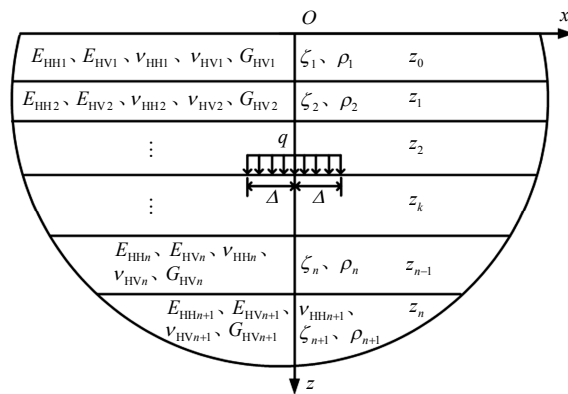


图 1 横观各向同性层状地基

Fig.1 Transversely isotropic multilayered soils

频率空间域内的动力方程不易直接求解,本文利用傅里叶变换将动力方程转化到频率-波数域内进行求解,定义空间域坐标 x 和波数域波数 κ 两者之间的傅里叶变换关系为

$$\left. \begin{aligned} g(\kappa, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(x, z) e^{-i\kappa x} dx \\ \tilde{g}(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\kappa, z) e^{i\kappa x} d\kappa \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: κ 为沿 x 方向的波数; $\tilde{g}$ 和 g 分别为频率-空间域和频率-波数域内的位移和应力函数。

2.1 控制方程

对于广义平面应变问题, 不考虑函数沿出平面方向的运动, 只考虑平面内的应变和位移, 因此, 地基材料几何关系为

$$\tilde{\varepsilon}_x = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad \tilde{\varepsilon}_z = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}, \quad \tilde{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \quad (2)$$

式中: $\tilde{u}$ 和 $\tilde{w}$ 分别为 x 和 z 方向的位移; $\tilde{\varepsilon}_x$ 、 $\tilde{\varepsilon}_z$ 和 $\tilde{\gamma}_{zx}$ 分别为 x 和 z 方向正应力以及 zx 平面的切应力。

线弹性横观各向同性本构关系 (应力-应变关系) 为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= d_{11}\tilde{\varepsilon}_x + d_{13}\tilde{\varepsilon}_z \\ \tilde{\sigma}_z &= d_{13}\tilde{\varepsilon}_x + d_{33}\tilde{\varepsilon}_z \\ \tilde{\tau}_{zx} &= d_{66}\tilde{\gamma}_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: d_{ij} 为弹性矩阵系数, d_{ij} 与 5 个弹性参数之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= (E_{HH}/a)(1 - \nu_{HV}^2) \\ d_{13} &= (E_{HH}/a)\nu_{HV}(1 + \nu_{HH}) \\ d_{33} &= (E_{HH}/a)(1 - \nu_{HH}^2) \\ d_{66} &= G_{HV} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $a = (1 + \nu_{HH})(1 - \nu_{HH} - 2\nu_{VH}^2)$; G_{VH} 可由试验测得或由下式经验公式给出^[6]:

$$G_{VH} = \frac{d_{11}d_{33} - d_{13}^2}{d_{11} + 2d_{13} + d_{33}} \quad (5)$$

广义平面应变问题动力控制方程为

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \quad (6)$$

本文主要讨论频率域内层状地基动力响应问题, 消掉位移和应力变量里的时间因子 $e^{i\omega t}$, 此时层状地基频率-空间域内的控制方程 (6) 可以对应写为

$$\left. \begin{aligned} d_{66} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + (d_{13} + d_{66}) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial z} + d_{11} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \tilde{u} &= 0 \\ d_{66} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + (d_{66} + d_{13}) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z \partial x} + d_{33} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} + \rho \omega^2 \tilde{w} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

利用傅里叶变换 (式 (1)) 可以得到频率-波数域内的波动方程为

$$\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}'' + (\mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})\mathbf{u}' - (\mathbf{K}_{11} - \rho\omega^2\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{u}''$ 和 $\mathbf{u}'$ 分别表示位移向量对坐标 z 的二阶和

一阶偏导数, 且

$$\mathbf{u} = [u, w]^T, \quad \mathbf{K}_{11} = \kappa^2 \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{66} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{21} = -\mathbf{K}_{12}^T = i\kappa \begin{bmatrix} 0 & d_{66} \\ d_{13} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} d_{66} & 0 \\ 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

引入位移向量 $\mathbf{u}$ 的对偶向量:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\{\tau_{xz} \quad \sigma_z\}^T \quad (10)$$

根据应力-位移的关系, 可知 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足 $\boldsymbol{\sigma} = -(\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}' + \mathbf{K}_{21}\mathbf{u})$ 。利用对偶变量 $\mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以将基本方程 (8) 转换为状态方程的形式:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{H}\mathbf{V} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{V} = [\mathbf{u} \quad \boldsymbol{\sigma}]^T$; $\mathbf{H}$ 为特征矩阵, 并且

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \\ \mathbf{C} = -\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} + \rho\omega^2\mathbf{I}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1} \quad (12)$$

2.2 边界条件

对于多层地基自由表面, 需满足应力为 0 的边界条件, 即

$$\boldsymbol{\sigma}(z_0) = \mathbf{0} \quad (13)$$

相邻层的交界面处需满足位移和应力的连续条件, 即

$$\mathbf{u}(z_i^+) = \mathbf{u}(z_i^-), \quad \boldsymbol{\sigma}(z_i^+) = \boldsymbol{\sigma}(z_i^-) \quad (14)$$

而对于多层地基下卧半无限地基, 无限远处的辐射边界条件需要考虑。为了确定在此情况下的边界条件, 需要进行下述处理。首先求解均质半无限地基特征矩阵 $\mathbf{H}$ 的特征值问题。

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\Lambda} \quad (15)$$

式中: $\boldsymbol{\Lambda}$ 为特征值矩阵; $\boldsymbol{\theta}$ 为特征向量矩阵, 二者写成分块矩阵的形式为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_i & \\ & -\lambda_i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{11} & \boldsymbol{\theta}_{12} \\ \boldsymbol{\theta}_{21} & \boldsymbol{\theta}_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中: λ_i 的实部均为正值。

引入变量 $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{V}$, 式 (11) 可以写成如下形式:

$$\Pi' = A\Pi, \Pi(z) = \text{diag}(c_1 e^{\lambda_1 z} \quad c_2 e^{-\lambda_2 z}) \quad (17)$$

式中: c_1 和 c_2 为积分常数。

从而可得

$$V = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 z} \\ c_2 e^{-\lambda_2 z} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

对于均质半无限地基, 位移向量 u 和应力向量 σ 必须保证为有限值, 因此, 积分常数 c_1 需要为 0。应用方程 (18) 可以得到层状地基地部均质半无限地基表面的边界条件为

$$p_l = K_{\infty} u_l, \quad K_{\infty} = \Theta_{22} \Theta_{12}^{-1} \quad (19)$$

2.3 方程求解

值得注意的是, 通过引入对偶向量, 二阶线性常微分方程 (式 (8)) 转化为一阶线性常微分方程 (式 (11))。式 (11) 的解是指数函数, 矩阵 H 只与层状地基属性、频率和波数有关, 对于地基厚度较大或者波数较大的情况, 直接求解均容易造成指数溢出。Gao 等^[23]采用精细积分算法求解此类方程取得了较好的效果, 在保证数值计算稳定的同时,

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ p_k \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & & & \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & & \\ & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & K_{11}^n & K_{12}^n \\ & & & & K_{21}^n & K_{22}^n + K_{11}^{\infty} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad P = KU \quad (21)$$

式中: P 和 U 分别为层面处的外荷载和位移向量; K 为频率-波数域内的刚度矩阵。

对矩阵 K 进行求逆得到动力柔度矩阵 $F = K^{-1}$, 然后乘以外荷载向量 P 即可得到频率波数域内任意点的位移解, 即

$$U(\kappa, z_i) = F_{ik} P(\kappa, z_k) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

式中: 柔度矩阵的每个元素 F_{ik} 表示在 z_k 平面上施加单位均布荷载作用下在 z_i 平面上的位移响应。将公式 (22) 写成分量的形式为

$$\begin{Bmatrix} u(\kappa, z_i) \\ w(\kappa, z_i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xz} \\ F_{zx} & F_{zz} \end{bmatrix}_{ik} \begin{Bmatrix} p_x(\kappa, z_k) \\ p_z(\kappa, z_k) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

得到了较高的精度。对于线性保守体系, 基于精细积分算法对一阶线性常微分方程 (11) 的解 (具体求解过程可参见文献[23]), 任意层状地基上下表面的位移和应力向量存在以下关系:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_a \\ -\sigma_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式中: u_a 和 σ_a 分别为层状地基上表面的位移和应力向量; u_b 和 σ_b 分别为层状地基下表面的位移和应力向量; 系数矩阵 K_{aa} 、 K_{ab} 、 K_{ba} 和 K_{bb} 可以通过矩阵 A 、 B 、 C 和 D 进行求解。

3 频率-波数域内位移求解

对于多层体系, 如图 1 所示, 在 z_k 层面施加半宽为 Δ 幅值为 p_k 的均布线荷载, 求解任意层面 ($z_k (k=0, 1, 2, \dots, n)$) 上节点的应力响应。首先求解出任意层面上下表面应力和位移的关系式 (式 (20)) 以及底部半无限空间表面位移和应力的关系式 (式 (19)), 然后组装得到整个体系频率-波数域内所有层面应力和位移的控制方程:

4 层状地基内部任意点位移响应求解

利用式 (1) 的第 2 式对公式 (23) 进行 Fourier 逆变换后得频率-空间域内的位移表达式为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}(x, z_i) \\ \tilde{w}(x, z_i) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xz} \\ F_{zx} & F_{zz} \end{bmatrix}_{ik} \begin{Bmatrix} p_x(\kappa, z_k) \\ p_z(\kappa, z_k) \end{Bmatrix} e^{i\kappa x} d\kappa \quad (24)$$

在区间 $x \in (-\Delta, \Delta)$ 内施加强度幅值为 $\tilde{p}_x$ 的水平 x 向均布简谐荷载, 利用傅里叶变换可得频率-波数域内的均布荷载幅值 $p_x(\kappa, z_k)$ 为

$$p_x(\kappa, z_i) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \tilde{p}_x(x, z_k) e^{-i\kappa x} dx = \frac{2\tilde{p}_x}{\kappa} \sin \Delta \kappa \quad (25)$$

同理若施加强度幅值为 $\tilde{p}_z$ 的竖直 z 向均布简谐荷载, 利用傅里叶变换可得频率-波数域内的均布荷载幅值 $p_z(\kappa, z_k)$ 为

$$p_z(\kappa, z_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_z(x, z_k) e^{-i\kappa x} dx = \frac{2\tilde{p}_z}{\kappa} \sin \Delta \kappa \quad (26)$$

此时水平荷载作用下产生的水平向和竖直向位移分别为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(x, z_i) &= \frac{\tilde{p}_x}{\pi} \int_0^{\infty} F_{xx} \left(\frac{2}{\kappa} \sin \Delta \kappa \right) \cos(\kappa x) d\kappa \\ \tilde{w}(x, z_i) &= \frac{\tilde{p}_x i}{\pi} \int_0^{\infty} F_{zx} \left(\frac{2}{\kappa} \sin \Delta \kappa \right) \sin(\kappa x) d\kappa \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

对于广义平面应变问题, 在外荷载作用下主要关注 z 方向的主应力 $\tilde{\sigma}_z$ 和 xz 面内的切应力 $\tilde{\tau}_{zx}$ 。将计算得到的位移 (式 (27)) 代入式 (3) 中可得, 在水平向均布荷载作用下层状地基的任意点的应力表达式为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}(x, z_i) &= \frac{\tilde{p}_z}{\pi} \int_0^{\infty} (i d_{33} F_{zx,z} - \kappa d_{13} F_{xx}) \Omega_s d\kappa \\ \tilde{\tau}_{zx}(x, z_i) &= \frac{\tilde{p}_z}{\pi} \int_0^{\infty} d_{66} (i \kappa F_{zx} + F_{xx,z}) \Omega_c d\kappa \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \Omega_s &= \sin(\kappa x) \left(\frac{2}{\kappa} \sin \Delta \kappa \right) \\ \Omega_c &= \cos(\kappa x) \left(\frac{2}{\kappa} \sin \Delta \kappa \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

同样, 施加竖直向均布荷载产生的水平向和竖直向位移分别为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(x, z_i) &= \frac{\tilde{p}_z i}{\pi} \int_0^{\infty} F_{xz} \left(\frac{2}{\kappa} \sin \Delta \kappa \right) \sin(\kappa x) d\kappa \\ \tilde{w}(x, z_i) &= \frac{\tilde{p}_z}{\pi} \int_0^{\infty} F_{zz} \left(\frac{2}{\kappa} \sin \Delta \kappa \right) \cos(\kappa x) d\kappa \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

将计算得到的位移 (式 (30)) 代入式 (3) 中可得, 在数值向均布荷载作用下层状地基的任意点的应力表达式为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz} &= \frac{\tilde{p}_z}{\pi} \int_0^{\infty} (d_{13} i \kappa F_{xz} + d_{33} F_{zz,z}) \Omega_c d\kappa \\ \tilde{\tau}_{zx} &= \frac{\tilde{p}_z}{\pi} \int_0^{\infty} d_{66} (i F_{xz,z} - \kappa F_{zz}) \Omega_s d\kappa \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

根据经验, 此处式 (28)、(31) 中的积分采用五点高斯积分进行求解已足够满足精度要求, 由于被积函数具有良好的收敛性, 对积分的贡献主要集中在低波数段, 对于高波数段贡献可以忽略, 所以

本文选用有限积分代替无限积分进行处理。

5 数值算例

5.1 方法验证

为验证本文算法的准确性, 首先选择横观各向同性均质半无限地基为研究对象, 在地基深度为 $z = \Delta$ 的位置施加半宽为 Δ 强度幅值为 $\tilde{p}_z$ 的竖直向均布荷载, 求解无量纲频率 $a_0 = 1.0$ ($a_0 = \Delta \omega / \sqrt{G_{HV} / \rho}$) 时地基在地基表面以及 $x = 0$ 处沿 z 轴的节点正应力 $\tilde{\sigma}_{zz}$ 。地基水平面的弹性模量 $E_{HH} = 50$ MPa 和泊松比 $\nu_{HH} = 0.25$, 竖直面的弹性模量 $E_{HV} = 25$ MPa、泊松比 $\nu_{HV} = 0.25$ 以及剪切模量 $G_{HV} = 7.5$ MPa, 阻尼比为 $\zeta = 0.01$, 密度为 $\rho = 2000$ kg/m³。将计算得到的正应力 $\tilde{\sigma}_{zz}$ 按照 $\tilde{\sigma}_{zz} = \tilde{\sigma}_{zz} / \tilde{p}_z$ 进行无量纲化, 并与文献[21]进行对比, 见图 2(a)。由图可见, 本文算法的结果与文献完全吻合, 从而证明了本文算法在求解横观各向同性均质半无限空间动应力的正确性。值得注意的是, 文献[21]中采用傅里叶变换以及相应的代数运算计算得到横观各向同性地基频率-波数域内的位移解, 而本文采用精细积分算法不仅适用于横观各向同性层状地基, 对任意各向异性地基情况同样适用。

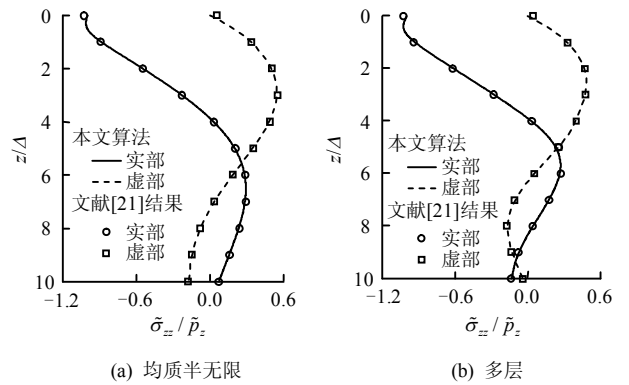


图2 横观各向同性地基
Fig.2 Transversely isotropic soils

为进一步验证本文算法对横观各向同性层状地基的适用性, 选取一两层地基下卧均质半无限空间的情况, 地基材料参数可参见表 1。 $G_0 = 1$ MPa, 在地基表面施加半宽为 Δ 强度幅值为 $\tilde{p}_z$ 的竖直向均布荷载, 求解无量纲频率 $a_0 = 1.0$ ($a_0 = \Delta \omega / \sqrt{G_{HV} / \rho}$, G_{HV} 取 $2G_0$) 时地基表面以及 $x = 0$ 处沿 z 轴节点的正应力 $\tilde{\sigma}_{zz}$ 。同样将计算得到的结果与文献[21]进行对比, 见图 2(b)。由图可见, 本文算法的结果与文献完全吻合, 从而验证了本文算法适

用于求解横观各向同性层状地基动应力响应。

表1 横观各向同性层状地基材料参数
Table 1 Material properties of the transversely isotropic multilayered soils

土层	E_{HH}/G_0	E_{HV}/G_0	$\nu_{HH}=\nu_{HV}$	G_{HV}/G_0	ρ/ρ_0	ζ	h/Δ
1	12	6	0.25	1.8	2	0.01	4
2	6	3	0.25	0.9	2	0.01	3
3	4	2	0.25	0.6	2	0.01	∞

5.2 水平和竖直弹性模量比值影响

横观各向同性属性与各向同性相比,主要体现在水平面和竖直面弹性参数的不同。为分析水平面和竖直面弹性模量的比值对地基动应力响应的影响,选取表1所示的地基材料参数,通过水平面和竖直面的弹性模量的比值 $n = E_{HH}/E_{HV}$ 改变 E_{HH} 的值,其余的数值保持不变。本算例中 $n = 0.5$ 、1 和 2,在 $z = 2\Delta$ 深度位置施加强度幅值分别为 $\tilde{p}_x$ 和 $\tilde{p}_z$ 的水平向和竖直向简谐荷载,分别计算地基沿 z 轴方向的水平剪应力 $\tilde{\tau}_{xz}$ 和竖直向正应力 $\tilde{\sigma}_{zz}$, 计算结果见图3。由图可见,荷载施加在地基内部时,地基

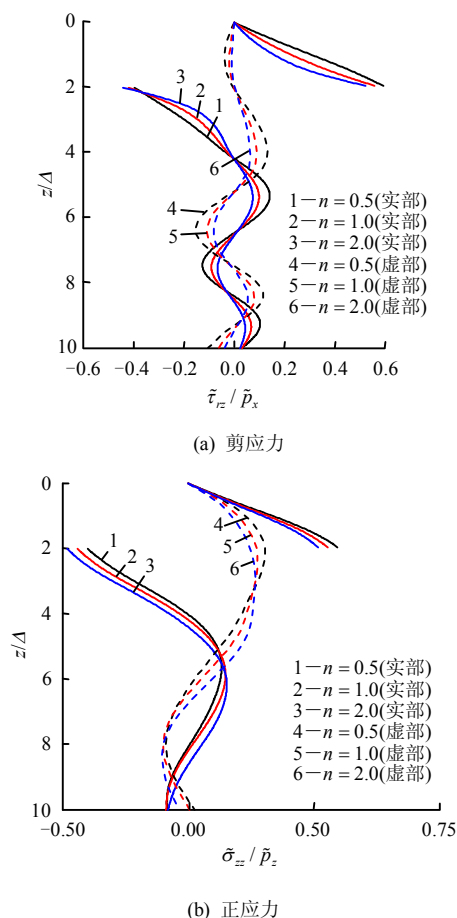


图3 水平和竖直弹性模量比值 n 对地基动应力的影响
Fig.3 Influence of n on dynamic stress response

自由表面的剪应力 $\tilde{\tau}_{xz}$ 和正应力 $\tilde{\sigma}_{zz}$ 均为 0, 两者实部曲线在荷载施加深度位置断开, 且该深度上下表面的应力绝对值之和等于 1。比值 n 对水平向荷载作用下地基剪应力 $\tilde{\tau}_{xz}$ 有明显的影响, 尤其对于峰值深度处, 随着 n 的增大, 应力值明显减小, 值得注意的是随着 n 的变化, 剪应力 $\tilde{\tau}_{xz}$ 为 0 的深度并没有发生变化。比值 n 对正应力 $\tilde{\sigma}_{zz}$ 也有显著的影响, 但没有明显的规律。

5.3 激励频率影响

为研究荷载激励频率 ω 对于地基应力的影响, 选取表1所示的地基参数, 无量纲频率 $a_0 = 0$ 、5、10, 其中 $a_0 = 0$ 的情况代表静力情况。在地基表面分别施加强度幅值分别为 $\tilde{p}_x$ 和 $\tilde{p}_z$ 的水平向和竖直向简谐荷载, 分别计算地基沿 z 轴方向的水平剪应力 $\tilde{\tau}_{xz}$ 和竖直向正应力 $\tilde{\sigma}_{zz}$, 计算结果见图4所示。由图可见, 剪应力 $\tilde{\tau}_{xz}$ 和正应力 $\tilde{\sigma}_{zz}$ 在地基表面的实部均为 1, 虚部均为 0。对于静力情况, 两者的实部

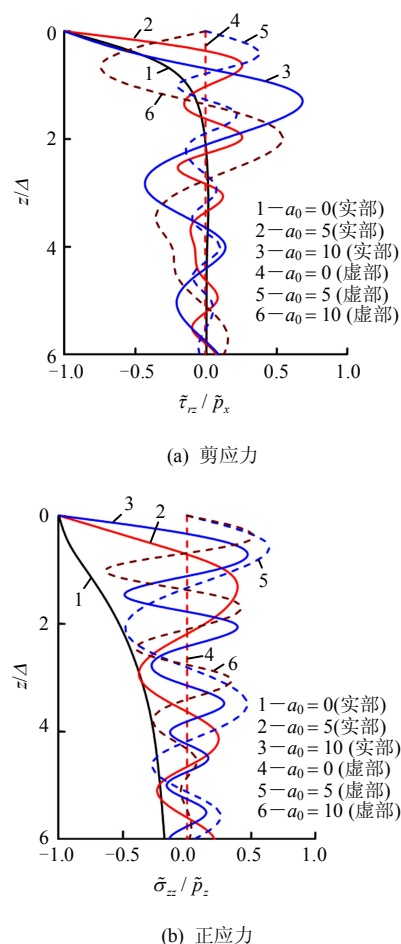


图4 激励频率对地基动应力的影响
Fig.4 Influence of excited frequency on dynamic stress response

曲线均比较平滑, 而虚部沿 z 轴方向全部为 0。随着 a_0 的增大, 应力随深度的变化曲线发生越来越明显的波动, 随着深度的增大, 应力值越来越小。

5.4 阻尼比影响

为研究地基阻尼比对于地基应力的影响, 同样选取表 1 所示的地基参数, 阻尼比 $\zeta = 0.01$ 、 0.03 和 0.05 , 其余参数保持不变。在地基表面分别施加强度幅值分别为 $\bar{p}_x$ 和 $\bar{p}_z$ 的水平向和竖直向简谐荷载, 分别计算地基沿 z 轴方向的水平剪应力 $\bar{\tau}_{xz}$ 和竖直向正应力 $\bar{\sigma}_{zz}$, 计算结果见图 5 所示。由图可见, 地基阻尼比对地基动应力的影响比较小, 尤其对于接近地表位置, 曲线变化不大。随着深度的增加应力曲线的幅值随着阻尼比的增加而减小, 应力为零的深度并没有变化。

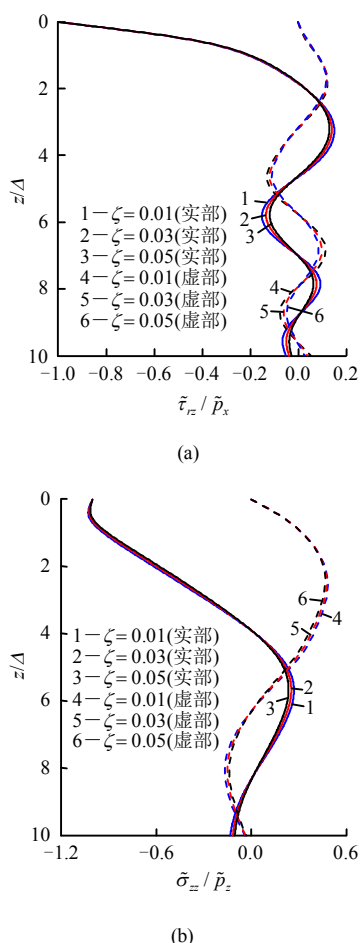


图 5 阻尼比对地基动应力的影响

Fig.5 Influence of damping ratio on dynamic stress response

6 结 论

横观各向同性层状地基的动力响应求解是近年来国内外学者非常关注的课题, 与各向同性地基相比更符合实际工程需要。本文提出了一种求解横观

各向同性层状地基在时间-简谐荷载作用下应力响应的算法, 数值算例验证了本文算法的精确性。该算法的优点主要有:

(1) 算法的求解是基于维数较小的矩阵 (2×2), 数值计算稳定。

(2) 状态方程的求解采用精细积分算法, 保证了计算的精度。

此外, 针对地基各向异性特性、阻尼比和激励频率对动应力响应的影响进行了广泛的参数分析, 为工程实际提供可靠的数值依据。地基的各向异性特性对地基动应力的影响比较显著, 不能简单假设为各向同性地基处理, 需要考虑地基的实际情况。

参 考 文 献

- [1] GAZETAS G. Analysis of machine foundation vibrations: state of the art[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 1983, 2(1): 2—42.
- [2] TSYNKOV S V. Numerical solution of problem on unbounded domain: A review[J]. **Applied Numerical Mathematics**, 1998, 27(4): 465—532.
- [3] KAUSEL E. Early history of soil-structure interaction[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2010, 30(9): 822—832.
- [4] LUCO J E, WESTMANN R A. Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half space[J]. **Journal of Applied Mechanics ASME**, 1972, 39(2): 527—534.
- [5] GAZATAS G. Static and dynamic displacements of foundations on heterogeneous multilayered soils[J]. **Geotechnique**, 1980, 30(2): 159—177.
- [6] GAZATAS G. Strip foundations on a cross-anisotropic soil layer subjected to dynamic loading[J]. **Geotechnique**, 1981, 31(2): 161—179.
- [7] WOLF J P, DARBRE G R. Dynamic-stiffness matrix of surface foundation on layered halfspace based on stiffness-matrix approach[R]. San Diego, California: General Atomic Company, 1983.
- [8] 林皋, 韩泽军, 李伟东, 等. 多层地基条带基础动力刚度矩阵的精细积分算法[J]. **力学学报**, 2012, 44(3): 557—567.
- [9] LIN G, HAN Z, ZHONG H, et al. A precise integration approach for dynamic impedance of rigid strip footing on

- arbitrary anisotropic layered half-space[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2013, 49(3): 96—108.
- [10] 韩泽军. 基础与复杂层状地基动力相互作用研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2014.
- HAN Ze-jun. A study for dynamic interaction between foundation and the complex multi-layered soil[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2014.
- [11] RAJAPAKSE R, WANG Y. Elastodynamic Green's functions of orthotropic half plane[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1991, 117(3): 588—604.
- [12] RAJAPAKSE R, WANG Y. Green's functions for transversely isotropic elastic half space[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1993, 119(9): 1724—46.
- [13] ESKANDARI-GHADI M. A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media[J]. **Journal of Elasticity**, 2005, 81(1): 1—19.
- [14] RAHIMIAN M, ESKANDARI-GHADI M, PAK RYS, et al. Elastodynamic potential method for a transversely isotropic solid[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2007, 133(10): 1134—45.
- [15] KHOJASTEH A, RAHIMAIN M, ESKANDARI M, et al. Asymmetric wave propagation in a transversely isotropic half-space in displacement potentials[J]. **International Journal of Engineering Science**, 2008, 46(7): 690—710.
- [16] KHOJASTEH A, RAHIMAIN M, PAK RYS. Three-dimensional dynamic Green's functions in transversely isotropic bi-materials[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2008, 45 (18—19): 4952—4972.
- [17] KHOJASTEH A, RAHIMAIN M, PAK RYS, et al. Asymmetric dynamic Green's functions in a two-layered transversely isotropic half-space[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2008, 134(9): 777—87.
- [18] KHOJASTEH A, RAHIMAIN M, ESKANDARI M, et al. Three-dimensional dynamic Green's functions for a multilayered transversely isotropic half-space[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2011, 48(9): 1349—61.
- [19] AI Z Y, LI Z X, CANG N R. Analytical layer-element solution to axisymmetric dynamic response of transversely isotropic multilayered half-space[J]. **Soil Dynamics & Earthquake Engineering**, 2014, 60(5): 22—30.
- [20] AI Z Y, LI Z X. Time-harmonic response of transversely isotropic multilayered half-space in a cylindrical coordinate system[J]. **Soil Dynamics & Earthquake Engineering**, 2014, 66: 69—77.
- [21] AI Z Y, ZHANG Y F. Plane strain dynamic response of a transversely isotropic multilayered half-plane[J]. **Soil Dynamics & Earthquake Engineering**, 2015, 75: 211—219.
- [22] 艾智勇, 张逸帆. 墙下条形基础与层状横观各向同性地基共同作用[J]. **岩土力学**, 2016, 37(5): 1243—1248.
- AI Zhi-yong, ZHANG Yi-fan. Interaction between strip foundation under wall and transversely isotropic layered soils[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(5): 1243—1248.
- [23] GAO Q, ZHONG W X, HOWSON W P. A precise method for solving wave propagation problems in layered anisotropic media[J]. **Wave Motion**, 2004, 40(3): 191—207.

(接第 2286 页)

《岩土力学》2017 年第 7 期被 EI 收录论文 (39 篇, 收录率 100 %) (2)

序号	论文题名	作者	页码
33	破碎泥岩注浆结石体动力特性的 SHPB 试验及其数值模拟研究	詹金武, 李 涛	2096—2102
34	基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进 DDA 方法	赵 健, 肖 明, 杨 阳, 等	2103—2112
35	极端波浪荷载作用下近海桥梁下方海床瞬态液化稳定性研究	段伦良, 张启博, 黄 博, 等	2113—2118
36	颗粒破碎的三维离散元模拟研究	张科芬, 张 升, 滕继东, 等	2119—2127
37	峰后裂隙岩石非线性损伤特性与数值模拟研究	谢 璨, 李树忱, 平 洋, 等	2128—2136
38	地下工程远程在线遥测技术及其在大狮子隧道的应用	冉曙光, 江 权, 宋磊博, 等	2137—2148
39	基于固有振动频率的滑移式和坠落式危岩块体稳定性评价模型研究	贾艳昌, 谢谟文, 昌圣翔, 等	2149—2156